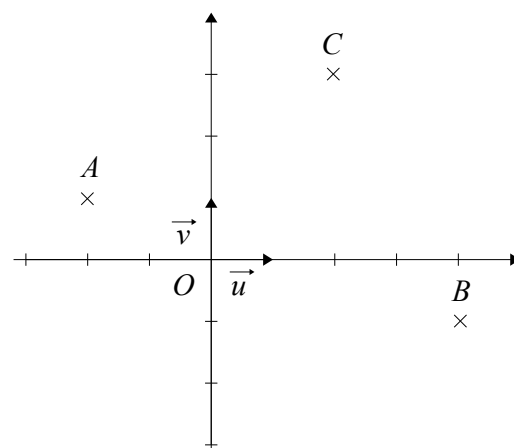


08-03 Propriétés de l'argument

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère trois points distincts A, B et C , d'affixes respectives non nulles a, b et c .

**Propriétés**

$$OA = |a| \quad (\vec{u}; \overrightarrow{OA}) = \arg(a) [2\pi]$$

$$AB = |b - a| \quad (\vec{u}; \overrightarrow{AB}) = \arg(b - a) [2\pi]$$

Exemple

Sur le schéma ci-dessus, on a : $A(-2 + i)$

$B(4 - i)$

$C(2 + 3i)$

$$\overrightarrow{AB}(6 - 2i)$$

$$AB = 2\sqrt{10}$$

$$\overrightarrow{AC}(4 + 2i)$$

$$AC = 2\sqrt{5}$$

$$(\vec{u}; \overrightarrow{OA}) \approx 2,68 [2\pi]$$

$$(\vec{u}; \overrightarrow{AB}) \approx -0,32 [2\pi]$$

$$(\vec{u}; \overrightarrow{AC}) \approx 0,46 [2\pi]$$

$$(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \approx 0,78 [2\pi]$$

Propriétés

$$\arg(ab) = \arg(a) + \arg(b) [2\pi]$$

$$\arg\left(\frac{1}{a}\right) = -\arg(a) [2\pi]$$

$$\arg\left(\frac{b}{a}\right) = \arg(b) - \arg(a) [2\pi]$$

Remarque

Ces propriétés se démontrent à l'aide de la forme exponentielle.

Propriété

$$(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) [2\pi]$$

Exemple

Dans l'exemple précédent, on a :

$$\frac{c-a}{b-a} = \frac{4+2i}{6-2i} \text{ ou encore } \frac{c-a}{b-a} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \arg\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right) [2\pi] \text{ donc } (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{4} [2\pi]$$

08-03 Applications

Application 1

Soient trois points distincts A , B et C d'affixes respectives a , b et c .

1. Que peut-on dire du triangle ABC dans chacun des cas suivants ?

a] $\frac{c-a}{b-a} = e^{-i\frac{\pi}{4}}$

b] $\frac{c-a}{b-a} = e^{i\frac{3\pi}{2}}$

c] $a = -4 + 3i$; $b = 9 - 2i$; $c = -17 + 8i$

2. Quelle relation doivent vérifier a , b et c pour que ABC soit un triangle équilatéral ?

Application 2

Soient les points du plan complexe suivants : $A(1 + i)$; $B(-1 + i)$; $C(-1 - i)$ et $D(1 - i)$.

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie la relation donnée.

a] $|z - 1 - i| = 3$

d] $\arg(z - 1 + i) = -\pi/2$ $[2\pi]$

b] $2|1 - i - z| = 5$

e] $\arg(z + 1 + i) = \pi/4$ $[2\pi]$

c] $|z - 1 + i| = |z + 1 + i|$

f] $\arg(z - 1 - i) = 0$ $[\pi]$

Application 3

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct.

Soient quatre points distincts A , B , C et D d'affixes respectives a , b , c et d telles que :
$$\begin{cases} a + c = b + d \\ a + ib = c + id \end{cases}$$

Déterminer la nature du quadrilatère $ABCD$.

Application 4

Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(O ; \overrightarrow{OU}, \overrightarrow{OV})$.

Soit l'application f qui au point M d'affixe z fait correspondre le point M' d'affixe z' tel que : $z' = \frac{1-i}{2}z + \frac{-3+i}{2}$.

1. Exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de z' en fonction des parties réelle et imaginaire de z .

2. Déterminer l'affixe ω du point du plan Ω tel que $f(\Omega) = \Omega$. On dit que Ω est le **point invariant** de f .

3. Comparer les nombres $\omega - z'$ et $z - z'$.

4. En déduire la nature du triangle $\Omega MM'$.

5. Construire les six premiers termes de la suite (A_n) telle que
$$\begin{cases} A_0 \text{ a pour affixe } 5 - 4i \\ A_{n+1} = f(A_n) \end{cases}$$

6. Étudier la convergence de la longueur de la ligne brisée $A_0 A_1 \dots A_n$ quand n tend vers l'infini.